Erinnerung:

Satz: *(Gram-Schmidt-Orthogonalisierung)* Für jedes linear unabhängige Tupel $T = (v_1, \ldots, v_n)$ in V existiert genau ein Orthonormalsystem $B = (b_1, \ldots, b_n)$, so dass gilt:

$$(*) \qquad \boxed{\forall\, 1 \leqslant j \leqslant n\colon \ v_j = \sum_{i=1}^{j} a_{ij} b_i \ \text{ mit } \ a_{ij} \in \mathbb{R} \ \text{ und } \ a_{jj} > 0.}$$

Ist ausserdem T eine Basis von V, so ist B eine Orthonormalbasis von V.

Bemerkung: Die Bedingung $(*)$ ist äquivalent dazu, dass die Basiswechselmatrix ${}_B[\mathrm{id}_V]_T$ eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen > 0 ist, oder auch zu:

$$(**) \qquad \boxed{\forall\, 1 \leqslant j \leqslant n\colon \ b_j = \sum_{i=1}^{j} a'_{ij} v_i \ \text{ mit } \ a'_{ij} \in \mathbb{R} \ \text{ und } \ a'_{jj} > 0.}$$

Konstruktion: $\tilde{v}_j := v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \langle b_i, v_j \rangle \cdot b_i$

$b_j := \frac{\tilde{v}_j}{\|\tilde{v}_j\|}$.

Variante: Dasselbe mit einer unendlichen Folge linear unabhängiger Vektoren $T = (v_1, v_2, \ldots)$ und einem unendlichen Orthonormalsystem $B = (b_1, b_2, \ldots)$.

Folge: Jeder endlich-dimensionale euklidische Vektorraum hat eine Orthonormalbasis.

Beginne mit einer geordneten Basis $T \Rightarrow$ ONB. B.

Folge: Ist $\dim V < \infty$, so lässt sich jede Orthonormalbasis jedes Unterraums U zu einer Orthonormalbasis von V erweitern.

Bew.: $B' = (b_1, \ldots, b_m)$ ONB von U.

Ergänze zu Basis $T = (b_1, \ldots, b_m, v_{m+1}, \ldots, v_n)$

Orthogonalisiere. $\Rightarrow$ ONB $B = (b_1, \ldots, b_m, b_{m+1}, \ldots, b_n)$ qed.

Satz: *(Cholesky-Zerlegung)* Für jede positiv definite reelle symmetrische Matrix A existiert genau eine reelle obere Dreiecksmatrix R mit allen Diagonaleinträgen > 0, so dass $A = R^T R$ ist.

Bew.: A $n \times n$-Matrix $\rightsquigarrow$ Skalarprodukt $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^T A y = \langle x, y \rangle$

$T = (e_1, \ldots, e_n)$ Standardbasis von $\mathbb{R}^n$. $\Rightarrow e_i^T \cdot A \cdot e_j$ = Eintrag von A in (i,j).

$\Rightarrow U$ Matrix wie oben $U = (b_1, \ldots, b_n)$ so dass $(b_1, \ldots, b_n)$ ONB.

$\Rightarrow b_i^T \cdot A \cdot b_j = \langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij} \Rightarrow \boxed{I_n = (b_i^T A b_j)_{i,j} = U^T \cdot A \cdot U} \Rightarrow$ Für $R := U^{-1}$ folgt $\boxed{R^T \cdot R = A}$. qed.

Beispiel: Sei $V := \mathbb{R}[X]$ mit dem Skalarprodukt $\langle F, G\rangle \; := \; \int_a^b F(t)G(t)\varphi(t)\,dt$ wie in §10.5. Wiederholte Anwendung der Gram-Schmidt-Orthogonalisierung auf die Basis $\{1, X, X^2, ...\}$ liefert eine neue Basis $\{P_0, P_1, \ldots\}$ bestehend aus sogenannten *orthogonalen Polynomen.* Diese haben je nach Wahl der Gewichtsfunktion φ verschiedene weitere interessante Eigenschaften.

$\forall n$: P_n Polynom vom Grad n.

10.10 Orthogonale Gruppe

Definition: Ein Isomorphismus $f\colon V \xrightarrow{\sim} W$ zwischen zwei euklidischen Vektorräumen $(V, \langle\ ,\ \rangle_V)$ und $(W, \langle\ ,\ \rangle_W)$ mit der Eigenschaft

$$\forall v, v' \in V\colon \langle f(v), f(v')\rangle_W = \langle v, v'\rangle_V$$

heisst *orthogonal* oder eine *Isometrie*.

Bedeutung: Eine Isometrie erhält alle Abstände und Winkel.

Proposition: Zwischen beliebigen euklidischen Vektorräumen derselben endlichen (!) Dimension existiert eine Isometrie. Jede Komposition von Isometrien ist eine Isometrie. Der identische Endomorphismus ist eine Isometrie.

Bem.: $\left.\begin{array}{l} \mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n) \text{ ONB von } V \\ \mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_n) \text{ ONB von } W \end{array}\right\} \Rightarrow f\colon V \to W$ def. d. $f(b_i) = c_i$.

Definition: Eine reelle $n\times n$-Matrix A, für welche die Abbildung $L_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ für das jeweilige Standard-Skalarprodukt eine Isometrie ist, heisst *orthogonal.* Die Menge $\mathrm{O}(n) = \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ aller orthogonalen $n\times n$-Matrizen heisst die *orthogonale Gruppe vom Grad n.*

Proposition: Für jede reelle $n \times n$-Matrix Q sind äquivalent:

(a) Q ist orthogonal.

(b) Die Spalten von Q bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt.

(c) $Q^TQ = I_n$.

(d) $QQ^T = I_n$.

Standardbasis

Bew (a) $Q = (v_1,..,v_n) \Rightarrow Q e_i = v_i \Rightarrow Q$ orthogonal $\Longleftrightarrow L_Q$ Isometrie $\Longleftrightarrow (v_1,..,v_n)$ ONB (b)

$$\Longleftrightarrow Q^TQ = \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix}(v_1,..,v_n) = \left(v_i^T v_j\right)_{i,j} = I_n \quad (c)$$

$$\Longleftrightarrow Q^T = Q^{-1} \Longleftrightarrow QQ^T = I_n. \quad (d)$$

qed.

Proposition: Die Menge $\mathrm{O}(n)$ ist eine Gruppe bezüglich Matrixmultiplikation.

Satz: *(Variante der Gram-Schmidt-Orthogonalisierung)* Sei V ein euklidischer Vektorraum der Dimension $\geqslant n$. Für alle $v_1, \dots, v_n \in V$ existiert ein Orthonormalsystem $(b_1, \dots, b_n)$ in V, so dass für alle $1 \leqslant j \leqslant n$ gilt

$$\boxed{v_j = \sum_{i=1}^{j} a_{ij} b_i \quad \text{für geeignete } a_{ij} \in \mathbb{R}.}$$

Beweis: Falls $b_1, \dots, b_{n-1}$ schon konstruiert sind,

setze $\tilde{v}_n := v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle b_i, v_n \rangle \cdot b_i$

Falls $\tilde{v}_n \neq 0$ setze $b_n := \frac{\tilde{v}_n}{\|\tilde{v}_n\|}$.

Falls $\tilde{v}_n = 0$ wähle $w_n \in V \setminus \langle b_1, \dots, b_{n-1} \rangle$ beliebig.

wiederhole Argumentation mit b_n ; setze $a_{nn} := 0$.

qed.

Satz: *(QR-Zerlegung)* Für jede reelle $n \times n$-Matrix A existiert eine orthogonale Matrix Q und eine reelle obere Dreiecksmatrix R, so dass $A = QR$ ist.

Bew.: Schreibe $A = (v_1, \dots, v_n)$ und $Q = (b_1, \dots, b_n)$ und $R = (a_{ij})_{i,j=1..n}$

Ergänze $a_{ij} := 0$ für $i > j$.

$\Rightarrow A = QR$

$(v_1, \dots, v_n) = (b_1, \dots, b_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$

qed.

Bemerkung: Die $\mathrm{O}(n)$ ist eine kompakte Teilmenge von $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$.

Bew.: $Q^T Q = I_n$ ist eine abgeschlossene Bedingung.
Beschränkt da alle Koeff. Betrag ≤ 1.

Beispiel: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}} \\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{1+x^2} & \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{pmatrix}}$$

Für $x \to \infty$ bleibt Q in dem Kompaktum $\mathrm{O}(n)$ und das Wachstum findet nur in dem Faktor R der Zerlegung QR statt.

10.11 Volumen

Die Anführungszeichen in den Sätzen dieses Abschnitts beziehen sich darauf, dass das Volumen erst in der mehrdimensionalen Analysis richtig definiert wird.

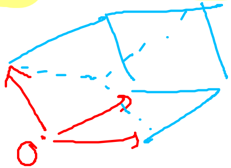
„Satz“: Für jede reelle $n \times n$-Matrix A und jede Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\boxed{\operatorname{vol}_n(L_A(X)) \;=\; |\det(A)| \cdot \operatorname{vol}_n(X),}$$

sofern beide Seiten wohldefiniert sind.

„Folge“: Das Volumen des von beliebigen $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ aufgespannten *Parallelotops* (oder *Parallelepipeds* oder *Raumspats*) ist

$$\operatorname{vol}_n\Big(\Big\{\sum_{i=1}^n t_i v_i \;\Big|\; \forall\, i\colon 0 \leqslant t_i \leqslant 1\Big\}\Big) \;=\; \big|\det(v_1, \ldots, v_n)\big|.$$



$A = (v_1, .., v_n) \Rightarrow A e_i = v_i \Rightarrow L_A([0,1]^n) = X.$

“Beweis des Satzes”: Erinnerung: A ist Produkt von Matrizen der Form: $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

genügt für diese:

- $I_n + \lambda \cdot E_{ij}$, $i \neq j$. $\lambda \in \mathbb{R}$ ⟷ Scherung, erhält Volumen.
- Permutationsmatrix ⟷ erhält Volumen.
- $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mu & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ $\mu \in \mathbb{R}$. ⟷ Volumen wird mit $|\mu|$ multipliziert. qed.